

Задача 1

В-1 Решите неравенство

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq \log_2 x + 1.$$

В ответ запишите сумму всех целых значений функции $f(x_0) = 16x_0$, где x_0 — решение неравенства.

Ответ: 33

Решение. Сделаем замену переменных

$$t = \log_2 x \Rightarrow \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t + 1.$$

Из условия $t^2 + 3t - 4 \geq 0$ следует, что $t \geq 1$ и $t \leq -4$. Если $t \geq 1$, то можно возвести в квадрат

$$t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t^2 + 2t + 1 \Rightarrow \sqrt{t^2 + 3t - 4} \leq t - 1 \Rightarrow t \leq 1 \Rightarrow t = 1.$$

Если $t \leq -4$, то неравенство будет выполняться всегда, при условии

$$t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq 0 \Rightarrow t^4 + 6t^3 + 8t^2 - 3t + 4 \geq 0 \Rightarrow t^2(t^2 + 6t + 8) + (4 - 3t) \geq 0.$$

Выражение в первых скобках неотрицательно при условии $t \leq -4$. Выражение во вторых скобках положительно при всех отрицательных t . То есть, неравенство выполняется для всех значений переменной из промежутка $t \leq -4$. Таким образом,

$$t \in \{1\} \cup (-\infty; -4] \Rightarrow 0 < x \leq 2^{-4}; x = 2.$$

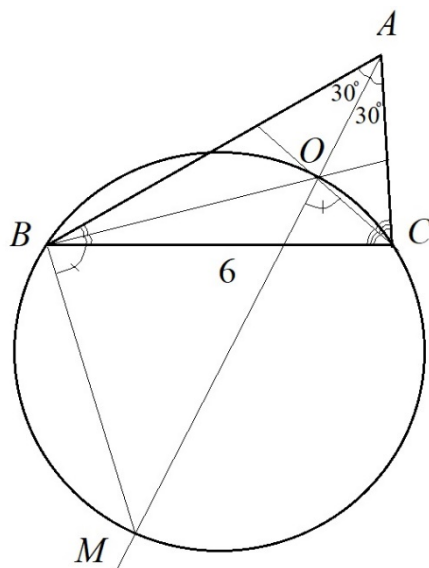
Рассмотрим функцию $f(x) = 2^4 x : 0 < f(x) \leq 1; 2^5 \Rightarrow 1 + 2^5 = 33$

Задача 2

В-1 Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O . Прямая AO пересекает описанную окружность треугольника OBC в точках O и M . Найдите длину секущей OM , если $BC = 6$, $AB : AC = 3 : 1$, и $\angle BAC = 60^\circ$.

Ответ: $4\sqrt{3}$

Решение.



Так как $\angle OBM = \frac{\angle ABC}{2} + \angle CBM = \frac{\angle ABC}{2} + \angle COM = \frac{\angle ABC}{2} + \angle OAC + \angle OCA = \frac{\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB}{2} = 90^\circ$, то $OM = 2R$ (где R — радиус описанной около треугольника OBC окружности).

Также $\angle BOC = 180^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} = 120^\circ$.

Поэтому $OM = 2R = \frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.

Задача 3

В-1 Решите неравенство

$$\sqrt{\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x}} > 2\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}}.$$

Ответ: $-\arctg \frac{1}{3} + 2\pi n \leq x < -\arctg \frac{1}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-3\sin x}, \\ \sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x} \geq 0, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{\cos x} < 6\sqrt{-3\sin x}, \\ \sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x}, \end{cases} & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < \sqrt{-3\operatorname{tg} x} \leq 1, \\ \cos x > 0, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq \operatorname{tg} x < -\frac{1}{12}, \\ \cos x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда получаем $-\arctg \frac{1}{3} + 2\pi n \leq x < -\arctg \frac{1}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4

В-1 При каких значениях параметра a уравнение

$$|x + 1 - a| + |4^x - a| = 4^x - x - 1$$

имеет на промежутке $[-1; 1]$ единственное решение?

Ответ: $0, 0.5, 1, 4$

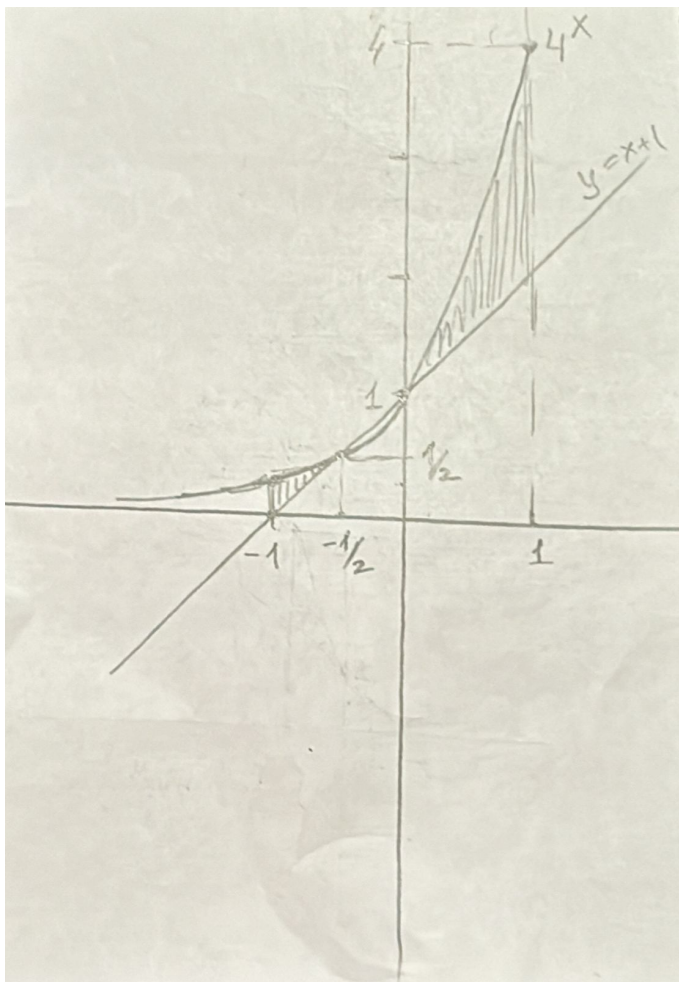
Решение. Наше уравнение может быть записано в виде

$$|a - x - 1| + |4^x - a| = (4^x - a) + (a - x - 1)$$

и, если к нему добавить условие попадания x в промежуток $[-1; 1]$, равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} a \geq x + 1, \\ a \leq 4^x, \\ -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим множество, которое задается этими неравенствами на плоскости с координатами x и a .



Графики функций $y = x + 1$ и $y = 4^x$ пересекаются в двух точках: $(0; 1)$ и $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Функция $y = 4^x$ выпукла вниз, поэтому при $x \in [-1; -\frac{1}{2}] \cup [0; 1]$ она больше функции $y = x + 1$, а при $x \in [-\frac{1}{2}; 0]$ — меньше. Каждому a соответствует одна горизонтальная прямая на плоскости, и нас интересует, когда эта прямая пересекается с рассматриваемым множеством ровно в одной точке. Как видим, это имеет место при следующих значениях параметра a :

0 (при этом $x = -1$), $\frac{1}{2}$ (при этом $x = -\frac{1}{2}$), 1 (при этом $x = 0$) и 4 (при этом $x = 1$).

Задача 5

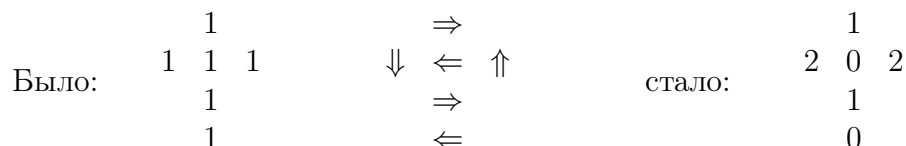
В-1 На каждой стороне белого кубика сидит по жуку. Кубик бросили, и жуки переполошились — каждый выбрал наугад одну из 4-х соседних граней и переполз туда.

С какой вероятностью кубик не изменит своего первоначального вида?

Ответ: $\frac{5}{256}$

Решение. Если нарисовать на гранях кубика стрелки, направленные в сторону, куда пополз жук — мы тем самым опишем исход броска. Всего таких исходов будет $4^6 = 4096$ (6 граней, на каждой по 4 варианта), и они равновероятны.

Нарисуем пример на развёртке:



Какие исходы приведут нас к такому же кубику? На каждую грань должно вползть по одному жуку, то есть на каждую грань должна быть направлена ровно одна стрелка. Значит, если начать двигаться против направления стрелок — дорогу мы найдём однозначно, «развилка» не будет, и в конце концов (так как граней на кубике конечное число) мы будем вынуждены вернуться на грань, с которой начали. Это верно для любой грани. Иными словами, рисунок из стрелок образует на сторонах кубика цикл, или несколько циклов.

Граней 6, поэтому длины циклов потенциально могут быть от 2 до 6. Циклы в 2, 3, 4 и 6 жуков нарисовать получится, а вот попытка нарисовать цикл длиной 5 приведёт к неподвижному жуку, что невозможно. Значит, правильный исход может состоять из таких циклов: 2, 2, 2; 2, 4; 3, 3; 6.

Посчитаем количество возможных рисунков с такими свойствами.

2, 2, 2 (то есть жуки попарно меняются местами). Жук с верхней грани меняется местами с одной из 4 боковых, а жуку с нижней остаётся всего 2 на выбор (он не может ползти на грань, противоположную выбранной верхним жуком.) То есть таких конфигураций $4 \cdot 2 = 8$.

2, 4. Цикл длиной 4 обходит вокруг ребра куба — по или против часовой стрелки. Оставшиеся два жука меняются местами. Значит, число таких конфигураций равно числу способов выбрать ребро (рёбер 12) умножить на 2 (по или против часовой). Значит, $12 \cdot 2 = 24$.

3, 3. Цикл длиной 3 обходит вокруг вершины, по или против часовой. Оставшиеся 3 жука ползут так же. Верхняя грань участвует в одном из циклов, значит мы можем выбрать для неё 4 соседние вершины, 2 ориентации, и ещё есть 2 ориентации для оставшихся жуков. Будет $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ рисунков.

6. Обойдём куб по направлению стрелок. С верхней грани мы можем перейти на одну из 4 боковых. Далее мы можем повернуть налево, направо, или спуститься на нижнюю грань. Варианты «налево» и «направо» могут продолжиться двумя способами — либо мы идём в ту же сторону, либо спускаемся вниз. Если мы шли в ту же сторону — дальше путь продолжается однозначно (через нижнюю грань), если спускались — вариантов дорисовывания 2.

Вариант «на втором шаге мы спустились вниз» дорисовывается до полного цикла двумя способами.

Всего циклов длиной 6 будет $4(2(1 + 2) + 2) = 32$.

А вероятность равна

$$\frac{32 + 16 + 24 + 8}{4096} = \frac{80}{4096} = \frac{5}{256} \quad (\text{приблизительно } 2\%).$$

Задача 6

В-1 На чертеже есть парабола и три точки A, B, C . Из каждой точки к параболе проведены две перпендикулярные друг другу касательные. Расстояние от вершины O параболы до прямой AC равно 2. Найдите площадь треугольника OAB , если $AC = 4$, а $BC = 3$.

Ответ: 1 или 7

Решение. Пусть уравнение параболы $\Pi : y = px^2$. Через точку (x_0, y_0) проходит прямая $L : y = k(x - x_0) + y_0$. Эта прямая будет касаться параболы в том случае, если она не параллельна оси параболы (т.е. $k \neq \infty$) и имеет с параболой единственную общую точку — то есть уравнение

$$k(x - x_0) + y_0 = px^2$$

должно иметь единственное решение относительно переменной x .

Уравнение квадратное — значит, для единственности решения нужно, чтобы дискриминант равнялся нулю.

$$px^2 - kx + (kx_0 - y_0) = 0,$$

дискриминант равен

$$k^2 - 4p(kx_0 - y_0) = 0,$$

и он, в свою очередь, тоже образует квадратное уравнение, но для переменной k .

Угловые коэффициенты k_1, k_2 перпендикулярных прямых относятся так: $k_1 \cdot k_2 = -1$. Значит, если из одной точки получилось провести перпендикулярные касательные к параболе, то уравнение имеет такие корни k_1, k_2 , что $k_1 \cdot k_2 = -1$, а по теореме Виета это значит, что $4py_0 = -1$.

То есть $y_0 = -\frac{1}{4p}$, и провести перпендикулярные касательные к параболе получится только из точек, лежащих на прямой $y = -\frac{1}{4p}$. Точки A, B, C лежат на одной прямой, и расстояние до

этой прямой от точки O известно из условия. Учитывая, что располагаться на прямой A, B, C могут в разном порядке, мы получаем два возможных варианта ответа: $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (4 + 3) = 7$ и $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (4 - 3) = 1$.

Задача 7

В-1 Назовем натуральное число счастливым, если все его цифры можно разбить на две группы, сумма цифр в каждой из которых одинакова. Примеры: 38221 ($3 + 2 + 2 + 1 = 8$); 5678 ($5 + 8 = 6 + 7$). Назовем число суперсчастливым, если оно счастливое и следующее за ним целое число тоже счастливое. Найдите количество суперсчастливых чисел на отрезке $[400; 2400]$.

Ответ: 6 (это числа 549, 1449, 1539, 1559, 1649, 2349).

Решение. 1) Рассмотрим трехзначные числа. Сумма цифр счастливого числа должна быть четной (иначе разбиение на две группы с одинаковой суммой цифр невозможно), поэтому суперсчастливое число должно заканчиваться цифрой 9, так как в ином случае суммы цифр двух последовательных чисел имеют разную четность. Значит, суперсчастливое трехзначное число имеет вид $\overline{ab9}$, а следующее за ним число состоит из цифр $a, b + 1, 0$. Отметим, что при этом случай $b = 9$ невозможен, так как тогда число не будет счастливым.

Поэтому должны делиться на две группы с одинаковой суммой цифр как цифры a, b и 9, так и цифры $a, b + 1$ и 0. Для первой комбинации цифр или $a = b + 9$ (откуда $a = 9, b = 0$), или $b = a + 9$ (что невозможно), или $a + b = 9$. Для второй комбинации $a = b + 1$. Одновременно оба числа счастливые только при $b = 4, a = 5$. Таким образом, имеется одно трехзначное суперсчастливое число 549 (за ним следует счастливое число 550).

2) Рассмотрим четырехзначные числа. Аналогично предыдущему, суперсчастливое число должно заканчиваться цифрой 9. И также оно не может заканчиваться на 99 (тогда сумма цифр двух последовательных чисел будет иметь разную четность) или на 999 (тогда оно не будет суперсчастливым). Значит, искомое число имеет вид $\overline{abc9}$, где $a \in [1, 9], b \in [0, 9], c \in [0, 8]$. Следующее за ним число состоит из цифр $a, b, c + 1, 0$.

Вначале рассмотрим случай $a = 1$. Должны делиться на две группы с одинаковой суммой цифр как цифры 1, b, c и 9 (назовем их первой комбинацией цифр), так и цифры 1, $b, c + 1$ и 0 (назовем их второй комбинацией).

Для чисел второй комбинации возможны три ситуации (заметим, что не имеет значения, в какую группу включать 0):

$$1 = b + c + 1 \quad (\text{то есть } b = c = 0),$$

$$b = 1 + c + 1 \quad (\text{то есть } b = c + 2),$$

$$c + 1 = 1 + b \quad (\text{то есть } b = c).$$

Для чисел первой комбинации вариантов гораздо больше, для уменьшения их количества подставим туда полученные выше три ситуации для второй комбинации.

Если $b = c = 0$, то комбинация 1, 0, 0, 9 счастливой не является.

Если $b = c + 2$, то получаются цифры 1, $c + 2, c$ и 9. Возможные варианты:

$$9 = 1 + c + 2 + c \quad (\text{тогда } c = 3),$$

$$9 + 1 = c + 2 + c \quad (\text{тогда } c = 4).$$

Получаются суперсчастливые числа 1539 (за ним следует 1540) и 1649 (за ним следует 1650).

Если $b = c$, то получаются цифры 1, c, c и 9. Возможные варианты:

$$9 = 1 + c + c \quad (\text{тогда } c = 4),$$

$$9 + 1 = c + c \quad (\text{тогда } c = 5).$$

Получаются суперсчастливые числа 1449 (за ним следует 1450) и 1559 (за ним следует 1560).

Таким образом, в интервале $[1000, 1999]$ есть 4 суперсчастливых числа: 1449, 1539, 1559 и 1649.

3) Рассмотрим случай $a = 2$. Должны делиться на две группы с одинаковой суммой цифр как цифры 2, b , c и 9 (первая комбинация цифр), так и цифры 2, b , $c + 1$ и 0 (вторая комбинация). Для чисел второй комбинации возможны три ситуации:

$$2 = b + c + 1 \quad (\text{то есть } b + c = 1),$$

$$b = 2 + c + 1 \quad (\text{то есть } b = c + 3),$$

$$c + 1 = 2 + b \quad (\text{то есть } b + 1 = c).$$

Если $b = c + 1$, то комбинация 2, b , c , 9 счастливой не является.

Если $b = c + 3$, то получаются цифры 2, $c + 3$, c и 9. Возможные варианты:

$$9 = 2 + c + 3 + c \quad (c = 2),$$

$$9 + 2 = c + 3 + c \quad (c = 4).$$

Получаются суперсчастливые числа 2529 (за ним следует 2530) и 2749 (за ним следует 2750).

Если $c = b + 1$, то получаются цифры 2, b , $b + 1$ и 9. Возможные варианты:

$$9 = 2 + b + b + 1 \quad (b = 3),$$

$$9 + 2 = b + b + 1 \quad (b = 5).$$

Получаются суперсчастливые числа 2349 (за ним следует 2350) и 2569 (за ним следует 2570).

Таким образом, в интервале $[2000, 2999]$ есть 4 суперсчастливых числа: 2349, 2529, 2569 и 2749.

Всего на отрезке $[400; 2400]$ имеется 6 суперсчастливых чисел: 549, 1449, 1539, 1559, 1649, 2349.

Задача 8

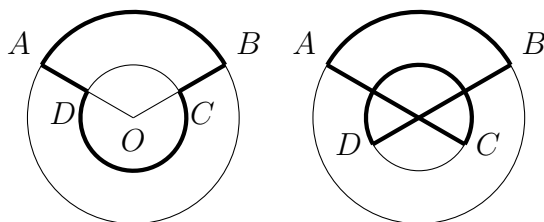
В-1 Вася нарисовал на доске замкнутую кривую $ABCD$, состоящую из четырех звеньев: AB - дуга окружности, меньшая полуокружности, BC - отрезок, CD - дуга окружности, большая полуокружности, DA - отрезок, таким образом, что любые два соседних звена перпендикулярны друг другу. Петя нарисовал кривую данного вида так, чтобы длины всех звеньев совпадали. Какие тогда будут углы у дуг AB и DC ?

Примечание: прямая перпендикулярна дуге окружности, если прямая перпендикулярна касательной к окружности.

Ответ: $\alpha_1 = 2\pi \left(\frac{2\sqrt{\pi^2+1}-2\pi}{2+2\sqrt{\pi^2+1}-2\pi} \right)$ и $2\pi - \alpha_1$, или $\alpha_2 = \pi - \sqrt{\pi^2 - 2\pi}$ и $2\pi - \alpha_2$.

Решение. Так как BC перпендикулярно дуге $\cup AB$, то радиус окружности, на которой лежит дуга, лежит на прямой BC . Аналогично, на прямой BC лежит радиус окружности, содержащей дугу $\cup CD$ — и одновременно радиусы обеих окружностей лежат на прямой DA . Из-за того, что дуги не равны полуокружностям по условию, прямые BC и DA пересекаются — и вместе всё это значит, что окружности имеют общий центр.

Также есть требование, что одна дуга больше полуокружности, а другая — меньше. С учётом того, что мы хотим получить равные длины всех звеньев ломаной, большая полуокружность должна быть у окружности меньшего радиуса, что оставляет нас с двумя вариантами ломаной:



Пусть $|\cup AB| = BC = |\cup CD| = DA = a$. Пусть радиус $\cup CD$ меньше. Обозначим O - центр окружности, содержащей дугу $\cup CD$, r - ее радиус, α - угол AOB .

В первом случае — с одной стороны, $\alpha = \frac{|\cup AB|}{r+a} = \frac{a}{r+a}$. С другой стороны $\alpha = \frac{2\pi r - |\cup CD|}{r} = \frac{2\pi r - a}{r}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\frac{a}{r+a} &= \frac{2\pi r - a}{r} \\ ra &= (2\pi r - a)(r + a) \\ ra &= 2\pi r^2 + 2\pi ra - ar - a^2 \\ 2\pi r^2 + (2\pi - 2)ar - a^2 &= 0\end{aligned}$$

Будем решать это уравнение как квадратное относительно r . Имеем $D = (2\pi - 2)^2 a^2 + 8\pi a^2 = 4a^2(\pi^2 + 1)$. Отсюда

$$r = \frac{-(2\pi - 2)a \pm 2a\sqrt{\pi^2 + 1}}{4\pi}.$$

Один корень отрицательный, а вот второй больше нуля (т.к. $\sqrt{\pi^2 + 1} > \pi$).

То есть

$$\alpha = 2\pi - \frac{a}{r} = 2\pi - \frac{4\pi}{2 + 2\sqrt{\pi^2 + 1} - 2\pi} = 2\pi \left(\frac{2\sqrt{\pi^2 + 1} - 2\pi}{2 + 2\sqrt{\pi^2 + 1} - 2\pi} \right) \approx 0.844684 \text{ радиан.}$$

У второй дуги угол равен $2\pi - \alpha$.

Рассмотрим второй случай (когда кривая самопересекающаяся). R - радиус большей окружности, r - меньшей. $\alpha = \angle AOB \in (0, 180)$.

Тогда, дуга $AB = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$. А дуга $CD = \frac{\pi r}{180}(360 - \alpha)$. $|AC| = |BD| = R + r$.

Тогда получим следующую систему:

$$R + r = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha = \frac{\pi r}{180}(360 - \alpha).$$

Тогда имеем

$$R\alpha = R \left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha - 1 \right) (360 - \alpha).$$

Получим следующее квадратное уравнение

$$\frac{\pi}{360}\alpha^2 - \pi\alpha + 180 = 0,$$

где положительный дискриминант равен $D = \pi^2 - 2\pi$. Тогда имеем два решения

$$\alpha_{\pm} = \frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - 2\pi}}{2\pi} \cdot 360.$$

Очевидно, что $\alpha_+ > 180$, а $\alpha_- \in (0, 180)$. Тогда получим второй вариант угла

$$\alpha_2 = \pi - \sqrt{\pi^2 - 2\pi} \text{ рад.}$$